

# Integration by parts formulae for degenerate diffusion measures on path spaces and diffeomorphism groups

K.D. Elworthy      Yves Le Jan      Xue-Mei Li

## Abstract

Integration by parts formulae are given for a class of measures on the space of paths of a smooth manifold  $M$  determined by the laws of degenerate diffusions. The mother of such formulae, on the path space of diffeomorphism group of  $M$  is shown to arise from a quasi-invariance property of measures determined by stochastic flows. From this the other formulae are derived by filtering out redundant noise using an associated LeJan-Watanabe connection.

Resumé: Des formules d'intégration par parties sont données pour les mesures sur l'espace des chemins associés des E.D.S, éventuellement dégénérées. La formule mère est donnée sur l'espace des chemins dans le groupe des difféomorphismes de la variété. Elle procède de la quasi invariance des lois du flot stochastique. La formule sur l'espace des chemins qui en dérive est obtenue en filtrant le bruit redondant à l'aide de la connexion intraduite par S. Watanabe et le deuxième auteur.

**A.** Consider the equation

$$dx_t = X(x_t) \circ dB_t + A(x_t)dt \tag{1}$$

---

Research supported by EPSRC grant GR/H67263 and EC programme Science plan ERB 4002PL910459.

on a compact  $C^\infty$  manifold  $M$ . Here  $\{B_t : t \geq 0\}$  is a Brownian motion on  $\mathbb{R}^m$  and  $A$  is a  $C^\infty$  vector field while  $X : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$  is  $C^\infty$  and gives a linear map  $X(x, \cdot) = X(x)(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$  for each  $x \in M$ .

Let  $\{\xi_t : t \geq 0\}$  be the solution flow to (1) with  $T_x \xi_t : T_x M \rightarrow T_{\xi_t(x)} M$  its derivative map at  $x \in M$ . For fixed  $T > 0$  suppose  $k$  is an element of the Cameron-Martin space  $H = L_0^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^m)$  and consider the random, time dependent O.D.E. on  $M$ , parametrized by  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_t^\tau(x) &= \tau (T_x \xi_t)^{-1} X(\xi_t(H_t^\tau(x))) \dot{k}_t, & 0 \leq t \leq T, \\ H_0^\tau(x) &= x, & x \in M. \end{aligned} \quad (2)$$

The solution exists for  $0 \leq t \leq T$  and we perturb our flow to  $\xi_t^\tau$  given by

$$\xi_t^\tau(x) = \xi_t(H_t^\tau(x)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Then  $\{\xi_t^\tau(x) : 0 \leq t \leq T\}$  is a semi-martingale satisfying

$$d\xi_t^\tau(x) = X(\xi_t^\tau(x)) \circ dB_t + A(\xi_t^\tau(x))dt + \tau X(\xi_t^\tau(x)) \dot{k}_t dt \quad (3)$$

(It is given by replacing  $B$  by  $B + \tau k$  in (1)) and so the laws of  $\xi^\tau(x)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , are mutually equivalent by the Cameron-Martin theorem. By differentiating the resulting two expressions for  $F(\xi^\tau(x))$  with respect to  $\tau$  at  $\tau = 0$  in the usual way, e.g. as in [EL] we see

Let  $F : C_x([0, T]; M) \rightarrow \mathbb{R}$  be  $C^1$  with bounded derivative. Then

$$dF\left(T\xi \cdot \int_0^t (T\xi_s)^{-1} \left(X(\xi_s(x)) \dot{k}_s\right) ds\right) = F(\xi(x)) \int_0^t \langle \dot{k}_s, dB_s \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (4)$$

This formula could also be deduced from the usual integration by parts formula on  $C_0([0, T]; \mathbb{R}^m)$  as in [Bis81]. However the above argument also shows that the law  $\mu_{\mathcal{D}}$  of  $\xi$  on the space of paths  $C_{id}([0, T]; \text{Diff}M)$  into the group of diffeomorphisms of  $M$  is quasi-invariant under the transformations  $\xi \rightarrow \xi \cdot (H^\tau)$  with  $H^\tau$  as above,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $k \in H$ . Let  $\mathcal{H}$  be the reproducing kernel Hilbert space of vector fields on  $M$  for the laws of the random field  $X(\cdot)B_1$ . Then  $K(\cdot) = X(\cdot)k$  is an arbitrary element of  $L_0^{2,1}([0, T]; \mathcal{H})$ . Let  $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$  be the martingale part of  $\{\int_0^t d\xi_s \circ \xi_s^{-1} : 0 \leq t \leq T\}$ . Then  $dW_t = X(\cdot)dB_t$  and we obtain:

$$\begin{aligned}
& \int_{C_{id}([0,T];\text{Diff}_M)} dF \left( T\theta. \int_0^t ad(\theta_s^{-1})\dot{K}_s ds \right) \mu_{\mathcal{D}}(d\theta) \\
& = \int_{C_{id}([0,T];\text{Diff}_M)} F(\theta.) \int_0^T \langle \dot{K}_s, dW_s \rangle_{\mathcal{H}} \mu_{\mathcal{D}}(d\theta)
\end{aligned} \tag{5}$$

for any  $C^1$  map  $F : C_{id}([0, T]; \text{Diff}M) \rightarrow \mathbb{R}$  with suitably bounded derivative  $dF$ . Here  $ad(\theta_s^{-1})$  refers to the adjoint action of  $\theta_s^{-1}$  on the space of vector fields of  $M$  considered as the Lie algebra of  $\text{Diff} M$ .

**Remarks:** (i): In (4), (5) and below we could equally well take  $k$ . or  $K$ . to be the adapted processes with sample paths in  $L_0^{2,1}$ , and in  $L^{1+\epsilon}$  as  $L_0^{2,1}$ -valued functions for some  $\epsilon > 0$ , c.f [EL].

(ii). for a general stochastic flow of diffeomorphisms of adequate regularity formula (5) remains valid but  $\mathcal{H}$  may be infinite dimensional. Indeed there is an analogous formula for any right invariant system on a Hilbert manifold with sufficiently regular group structure.

(iii). Equation (2) defining  $H_t^\tau, 0 \leq t \leq T$ , is just the right invariant equation on  $\text{Diff}M$  corresponding to the element  $ad(T\xi_t)^{-1}(\dot{K}_t)$ . In general it is a function of  $\xi$ ., but if there exists  $V$  in  $\mathcal{H}$  which commutes with all other elements of  $\mathcal{H}$  then setting  $K_t = tv$  we obtain an  $H_t^\tau$ , right multiplication by which leaves  $\mu_{\mathcal{D}}$  quasi-invariant .

**B.** Equation(4) is not an integration by parts formula on  $C_x([0, T]; M)$ , strictly speaking, since we do not have a vector field on  $C_x([0, T]; M)$  and there is possibly redundant noise coming from lack of injectivity of  $X$ . To put (4) in correct form we need the conditional expectation

$$\bar{V}_t^k; = \left\{ T\xi_t \int_0^t (T\xi_s)^{-1} \left( X(\xi_s(x))\dot{K}_s \right) ds \mid \sigma \{ \xi_s(x) : 0 \leq s \leq T \} \right\}. \tag{6}$$

For simplicity here we assume that  $X(x)$  has constant rank (non-singularity). Then  $X$  has image a subbundle  $I(X)$  of  $TM$  on which  $X$  induces (i) a Riemannian metric  $\{ \langle \cdot, \cdot \rangle_x, x \in M \}$  and (ii) an affine connection  $\check{\nabla}$ , which is a metric connection for this metric (the LeJan-Watanabe connection). If  $Y(x) : I(X)_x \rightarrow \mathfrak{m}$  is the adjoint of  $X(x) : \mathfrak{m} \rightarrow I(X)_x$  these satisfy

$$X(x)Y(x)v = v, \quad v \in T_x M$$

and

$$\check{\nabla}_v Z = X(x)d(Y(\cdot)Z(\cdot))v$$

for all  $v \in T_x M$  and  $Z$  a section of  $I(X)$ . There is also an 'adjoint semi-connection'  $\hat{\nabla}$  to  $\check{\nabla}$  which gives a derivative  $\hat{\nabla}_{Z_2} Z_1$  of a vector field  $Z_1$  in the direction of a section  $Z_2$  of  $I(X)$  by

$$\hat{\nabla}_{Z_2} Z_1 = \check{\nabla}_{Z_1} Z_2 - [Z_1, Z_2].$$

Let  $v_0 \in T_x M$  and set

$$\bar{v}_t = \{T\xi_t(v_0) | \sigma \{\xi_s(x) : 0 \leq s \leq T\}\}.$$

Then, from [ELL] following [ELJL95] and [EY93], if  $A(x) \in I(X)_x$  for each  $x \in M$  then  $\{\bar{v}_t : 0 \leq t \leq T\}$  satisfies

$$\frac{\hat{D}\bar{v}_t}{\partial t} = -\frac{1}{2}\check{\text{Ric}}^\#(\bar{v}_t) + \check{\nabla}A(\bar{v}_t) \quad (7)$$

where  $\langle \check{\text{Ric}}^\#(u_1), u_2 \rangle = \sum_{i=1}^r \langle \check{R}(e_i, u_1)u_2, e_i \rangle_x$  for

$$\check{R} : TM \oplus TM \rightarrow \mathcal{L}(I(X); I(X))$$

the curvature tensor of  $\check{\nabla}$  and  $e_1, \dots, e_r$  an orthonormal basis for  $I(X)_x$  where  $u_1 \in T_x M$ ,  $u_2 \in I(X)_x$  and  $I(X)_x$  is identified with its image in  $T_x M$ . This can also be written as

$$D\bar{v}_t = \nabla X(\bar{v}_t) (\check{\nabla}_t \circ d\check{B}_t) + \nabla A(\bar{v}_t) dt - \frac{1}{2}\check{\text{Ric}}(\bar{v}_t) dt \quad (8)$$

using the Levi-civita connection  $\nabla$  for any Riemannian metric on  $M$  which extends that of  $I(X)$ . Here  $\check{\nabla}_t \circ d\check{B}_t = Y(\xi_t(x)) X(\xi_t(x)) \circ dB_t$  and can be represented by a parallel translation of the differential  $d\check{B}_t$  of the martingale part of the stochastic anti-development of  $\{\xi_t(x) : 0 \leq t \leq T\}$ . Finally we have, from (4): *For any given  $v_0 \in T_x M$  let  $\{W_t^A(v_0) : 0 \leq t \leq T\}$  be the solution of (8), or equivalently of (7) if  $A(y) \in I(y)$  for each  $y \in M$ . Let  $\mu_x$  be the law of  $\{\xi_t(x) : 0 \leq t \leq T\}$  on  $C_x([0, T]; M)$ . Then*

$$\begin{aligned} & \int_{C_x([0, T]; M)} dF \left( W^A \int_0^\cdot (W_s^A)^{-1} \left( X(\sigma(s)) \dot{K}_s \right) ds \right) \mu_x(d\sigma) \\ &= \int_{C_x([0, T]; M)} F(\sigma) \int_0^T \left\langle X(\sigma(s)) \dot{K}_s, \check{\nabla}_s d\check{B}_s \right\rangle_{T_{\sigma(s)} M} \mu_x(dx) \end{aligned} \quad (9)$$

for any  $C^1$  map  $F : C_x([0, T]; M) \rightarrow \mathbb{R}$  with bounded derivative and any  $K \in L_0^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ .

**Remarks:** (i) For the law of  $\xi_t(x)$  for a more general stochastic flow of diffeomorphisms, as described in §A formula (9) remains valid with  $X(\sigma(s))\dot{k}_s$  replaced by  $\dot{K}_s(\sigma(s))$ .

(ii).  $k$  (or  $K$ ) can be non-anticipating processes as in Remark (i) of §A.

(iii). For an analogous approach for non-degenerate equations see [EL], for LeJan-Watanabe connections in the non-degenerate case see [ELJL95]; the degenerate case with detailed discussions of these results and of the singular case will appear in [ELL].

(iv) Following on from remark (ii) in section §A note this formulation extends to loop spaces if one adapts the point of view used by Driver in [Dri95] for loops on Lie groups. Replacing  $B_t$  by a centred Gaussian process  $B_{t,\alpha}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  with covariance  $(B_{t,\alpha}^i B_{s,\beta}^j) = \delta_{i,j} s \wedge t (\alpha \wedge \beta - \alpha\beta)$ , one gets a process  $\xi_{t,\alpha}$  which represents a Brownian motion in the group of based loops in the diffeomorphism group, acting naturally on pinned loops of  $M$ . Taking into account the  $\alpha$  dependence, integration by parts formulae (4), (5) and (9) extend naturally to this situation.

## Version française abrégée

A. Considerons l'équation différentielle stochastique sur une variété compacte  $M$ .  $\{B\}$  désigne un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^m$  et  $A$  et un champ de vecteurs  $C^\infty$  tandis que  $X : \mathbb{R}^m \times M \rightarrow TM$  est  $C^\infty$  et donne une application linéaire  $X(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$  pour tout  $x \in M$ .

Soit  $\{\xi_t^\tau\}$  le flot stochastique solution de

$$dx_t = X(x_t) \circ dB_t + A(x_t)dt \quad (10)$$

et  $T_x \xi_t : T_x M \rightarrow T_{\xi_t(x)} M$  sa dérivée en  $x \in M$ . Pour  $T > 0$  fixé, soit  $k$  un élément de l'espace de Cameron Martin  $H = L_0^{2,1}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ . Considerons l'équation différentielle ordinaire sur  $M$  paramétrée par  $\tau \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_t^\tau(x) &= \tau (T_x \xi_t)^{-1} X(\xi_t(H_t^\tau(x))) \dot{k}_t, & 0 \leq t \leq T, \\ H_0^\tau(x) &= x, & x \in M. \end{aligned} \quad (11)$$

La solution existe pour  $0 \leq t \leq T$ . Définissons le flot perturbé  $\xi_t^\tau$  par

$$\xi_t^\tau(x) = \xi_t(H_t^\tau(x)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors  $\{\xi_t^\tau\}$  est une semi-martingale verifiant (3). Les lois des  $\xi^\tau(x)$  sont équivalentes. En différentiant par rapport à  $\tau$  en  $\tau = 0$  (cf par exemple [EL]) on voit que:

Soit  $F : C_x([0, T]; M)$  supposée  $C^1$  et à dérivées bornées. Alors

$$dF\left(T\xi \cdot \int_0^\cdot (T\xi_s)^{-1} \left(X(\xi_s(x)\dot{k}_s)\right) ds\right) = F(\xi(\cdot)) \int_0^T \langle \dot{k}_s, dB_s \rangle_m. \quad (12)$$

Cette formule peut être déduite de la formule usuelle d'intégration par parties sur  $C_0([0, T]; {}^m)$  comme dans [Bis81]. Cependant, l'argument précédent montre aussi que la loi  $\mu_{\mathcal{D}}$  de  $\xi$  sur l'espace des trajectoires  $C_{id}([0, T]; DiffM)$  dans le groupe des difféomorphismes de  $M$  est quasi invariante par les transformations  $\xi \rightarrow \xi \cdot (H^\tau)$ , où  $H$  est défini ci dessus,  $\tau \in \cdot$ ,  $k \in H$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'espace auto-reproduisant de champs de vecteurs sur  $M$  associé au champ gaussien  $X(\cdot)B_1$ .  $K(\cdot) = X(\cdot)k$  est alors un élément arbitraire de  $L_0^{2,1}([0, T]; \mathcal{H})$ . Soit  $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$  la partie martingale de  $\{\int_0^t d\xi_s \circ \xi_s^{-1} : 0 \leq t \leq T\}$ . Alors  $dW_t = X(\cdot)dB_t$  et nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \int_{C_{id}([0, T]; DiffM)} dF\left(T\theta \cdot \int_0^\cdot ad(\theta_s^{-1})\dot{K}_s ds\right) \mu_{\mathcal{D}}(d\theta) \\ &= \int_{C_{id}([0, T]; DiffM)} F(\theta) \int_0^T \langle \dot{K}_s, dW_s \rangle_{\mathcal{H}} \mu_{\mathcal{D}}(d\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

pour toute application  $C^1$   $F : C_{id}([0, T]; DiffM) \rightarrow \cdot$  possédant une dérivée adéquatément bornée. On désigne par  $ad(\theta_s^{-1})$  la représentation adjointe de  $f \theta_s^{-1}$  sur l'espace des champs de vecteurs sur  $M$  considéré comme l'algèbre de Lie de  $Diff M$ .

**B.** L'équation (12) n'est pas une formule d'intégration par parties sur  $C_x([0, T]; M)$ , à proprement parler. Pour mettre (12) sous une forme plus appropriée, il faut prendre l'espérance conditionnelle

$$\bar{V}_t^k := \left\{ T\xi_t \int_0^t (T\xi_s)^{-1} \left(X(\xi_s(x)\dot{K}_s)\right) ds \mid \sigma \{\xi_s(x) : 0 \leq s \leq T\} \right\}. \quad (14)$$

Pour simplifier, nous supposons que le rang de  $X(x)$  est constant. Alors, l'image de  $X$  est un sous-fibré  $I(X)$  de  $TM$  sur lequel  $X$  induit (i) une métrique riemannienne  $\{\langle, \rangle_x, x \in M\}$  et (ii) une connexion affine  $\{\nabla, \cdot\}$ .

qui preserve la métrique en question. Si nous notons  $Y(x) : I(X)_x \rightarrow {}^m$  l'application adjointe de  $X(x) : {}^m \rightarrow I(X)_x$ , on a

$$X(x)Y(x)v = v, \quad v \in T_xM$$

et

$$\check{\nabla}_v Z = X(x)d(Y(\cdot)Z(\cdot))v$$

pour tout  $v \in T_xM$  et pour toute section  $Z$  de  $I(X)$ . Il y a aussi une 'semi-connection adjointe'  $\hat{\nabla}$  de  $\check{\nabla}$  qui associe une dérivée  $\hat{\nabla}_{Z_2}Z_1$ , à tout champ de vecteur  $Z_1$  dans la direction  $Z_2$  d'une section de  $I(X)$ , définie par

$$\hat{\nabla}_{Z_2}Z_1 = \check{\nabla}_{Z_1}Z_2 - [Z_1, Z_2].$$

Si  $v_0 \in T_xM$  posons

$$\bar{v}_t = \{T\xi_t(v_0) | \sigma \{\xi_s(x) : 0 \leq s \leq T\}\}.$$

Alors, d'après [ELL] et suite à [ELJL95] et [EY93], si  $A(x) \in I(X)_x$  pour tout  $x \in M$ ,  $\{\bar{v}_t : 0 \leq t \leq T\}$  vérifie

$$\frac{\hat{D}\bar{v}_t}{\partial t} = -\frac{1}{2}\check{\text{Ric}}^\#(\bar{v}_t) + \check{\nabla}A(\bar{v}_t) \quad (15)$$

où  $\langle \check{\text{Ric}}^\#(u_1), u_2 \rangle = \sum_{i=1}^r \langle \check{R}(e_i, u_1)u_2, e_i \rangle_x$ ,

$$\check{R} : TM \oplus TM \rightarrow \mathcal{L}(I(X); I(X))$$

étant le tenseur de courbure de  $\check{\nabla}$  et  $e_1, \dots, e_r$  une base orthonormale de  $I(X)_x$ :  $u_1$  est un élément de  $T_xM$ ,  $u_2$  un élément de  $I(X)_x$  et  $I(X)_x$  est identifié à son image dans  $T_xM$ . On peut aussi l'écrire sous la forme

$$D\bar{v}_t = \nabla X(\bar{v}_t) (\tilde{\int}_t \circ d\tilde{B}_t) + \nabla A(\bar{v}_t)dt - \frac{1}{2}\check{\text{Ric}}(\bar{v}_t)dt \quad (16)$$

en utilisant la connexion de Levi Civita associée à toute métrique riemannienne sur  $M$  étendant celle définie sur  $I(X)$ .  $\tilde{\int}_t \circ d\tilde{B}_t = Y(\xi_t(x))X(\xi_t(x)) \circ dB_t$  peut être représenté par transport parallèle de la différentielle  $dB_t$  de la partie martingale de l'antidéveloppement stochastique de  $\{\xi_t(x) : 0 \leq t \leq T\}$ . Enfin on déduit de (12) le résultat suivant:

it Pour tout  $v_0 \in T_x M$  soit  $\{W_t^A(v_0) : 0 \leq t \leq T\}$  la solution de (16) (ou de (15) si  $A(y) \in I(y)$  pour tout  $y \in M$ ). Alors

$$\begin{aligned} & \int_{C_x([0,T];M)} dF \left( W^A \int_0^\cdot (W_s^A)^{-1} \left( X(\sigma(s)) \dot{K}_s \right) ds \right) \mu_x(d\sigma) \\ &= \int_{C_x([0,T];M)} F(\sigma) \int_0^T \left\langle X(\sigma(s)) \dot{K}_s, \int_s^\cdot d\check{B}_s \right\rangle_{T_{\sigma(s)}M} \mu_x(dx) \end{aligned} \quad (17)$$

pour toute application  $C^1$   $F$  de  $C_x([0, T]; M)$  a derivée bornée et tout  $K. \in L_0^{2,1}([0, T]; m)$ .

## References

- [Bis81] J. M. Bismut. Martingales, the Malliavin calculus and Hhormander's theorem. In D. Williams, editor, *Stochastic Integrals, Lecture Notes in Maths. 851*, pages 85–109. Springer-Verlag, 1981.
- [Dri95] Bruce K. Driver. Towards calculus and geometry on path spaces. In *Stochastic Analysis: AMS Proceedings of symposium in pure Math. Series*, pages 423–426. AMS. Providence, Rhode Island, 1995.
- [EL] K.D. Elworthy and Xue-Mei Li. A class of integration by parts formulae in stochastic analysis i. To appear in *Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory* (dedicated to Prof. Itô on the occasion of his eightieth birthday) Springer-Verlag.
- [ELJL95] K. D. Elworthy, Yves Le Jan, and Xue-Mei Li. Concerning the geometry of stochastic differential equations and stochastic flows. To appear in 'New Trends in stochastic Analysis', Proc. Taniguchi Symposium, Sept. 1995, Charingworth, ed. K. D. Elworthy and S. Kusuoka, I. Shigekawa, World Scientific Press, 1995.
- [ELL] K.D. Elworthy, Yves LeJan, and Xue-Mei Li. In preparation.
- [EY93] K. D. Elworthy and M. Yor. Conditional expectations for derivatives of certain stochastic flows. In J. Azéma, P.A. Meyer, and M. Yor, editors, *Sem. de Prob. XXVII. Lecture Notes in Maths. 1557*, pages 159–172. Springer-Verlag, 1993.

**Addresses:**

K. D. Elworthy: Mathematics Department, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK.

Yves, Le Jan: Département de Mathématique, Université Paris Sud, 91405 Orsay, France

Xue-mei Li: Department of Mathematics, U-9, University of Connecticut, 196 Auditorium road, Storrs, Connecticut 06269-3009, USA